26.02.2019
Интерлюдия. Производные и интегралы.

1. *Разряд конденсатора.*

Рассмотрим такой процесс. Есть конденсатор, заряженный до разности потенциалов U_0. В момент времени $t = 0$ его замыкают на сопротивление R. Что будет происходить?

Очевидно, через сопротивление потечёт ток, конденсатор начнёт разряжаться и, в конце концов, разрядится. Более того, мы практически сразу можем сказать, что за всё время, которое потребуется для разряда конденсатора, на сопротивлении выделится тепло $Q = \frac{CU^2}{2}$. Это так называемы *интегральный подход*, когда нам интересно лишь то, что случиться в целом, за всё время существования Вселенной.

Но, иногда, хочется узнать, как именно всё происходило.

Аналогия понятна: в обычной механике можно решать задачу через законы сохранения, а можно – через кинематику.

Хорошо.

Запишем какие-нибудь законы, которые справедливы в любой момент времени. Прежде всего, закон Ома: $U(t) = I(t) \cdot R$ и определение ёмкости: $C = \frac{q(t)}{U(t)}$.

Теперь вспомним *динамический закон* – определение тока: $I(t) = \frac{{}_\Delta q(t)}{{}_\Delta t}$.

Теперь можно всё сложить и посмотреть, что получится:

$$I(t) = \frac{{}_\Delta\big(C \cdot U(t)\big)}{{}_\Delta t} = C \cdot \frac{{}_\Delta U(t)}{{}_\Delta t} = C\frac{{}_\Delta\big(I(t) \cdot R\big)}{{}_\Delta t} = RC\frac{{}_\Delta I(t)}{{}_\Delta t}.$$

Равенство становится точным, если промежутки времени берутся бесконечно малыми. В этом случае мы переходим к производной:

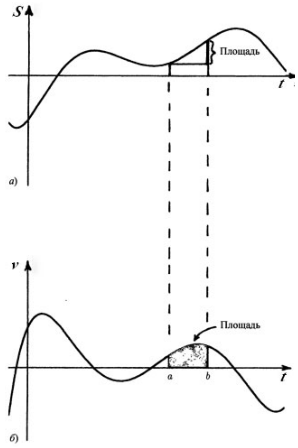
$$I(t) = \frac{dI(t)}{dt} = RC \cdot I'(t) = RC \cdot \dot{I}(t), \text{ или } \dot{I}(t) = \frac{1}{RC} \cdot I(t)$$

Заметим, что и физики, и математики очень любят компактные записи математических выражений. Точка над функцией означает производную именно по времени. Следовательно, и функция обязательно должна зависеть от времени. Так что явное указание такой зависимости (t) можно опустить. Получается:

$$\dot{I} = \frac{1}{RC} \cdot I.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка.

2. Производные и первообразные



Пусть у нас известна функция $v(t)$, описывающая скорость изменения функции $S(t)$. То есть $v(t)=\frac{dS(t)}{dt}$, или $v(t)=S'(t)$.

Посмотрим на рисунок. Нижняя кривая описывает скорость изменения верхней. При этом пусть у нас расстояние между a и b очень мало. Посмотрим, что такое площадь, ограниченная прямыми a и b на нижнем рисунке. Это $b-a$ умножить на некоторое «среднее» значение функции v_{ab} в средней точке где-то между a и b. Но эта средняя точка как раз и характеризует среднюю скорость роста верхней функции s на том же интервале!

Иными словами, $S(b)=S(a)+_{\Delta}S=S(a)+v_{ab}\cdot(b-a)$, или

$$\underbrace{v_{ab}\cdot(b-a)}_{\text{Площадь под графиком } v}=S(b)-S(a).$$

Такое вычисление площади, естественно, не очень точное. Правильнее разбить отрезок $|ab|$ на очень много очень коротких отрезков: $|ab|=|at_1|+|t_1t_2|+\ldots+|t_nb|$ и с каждым отрезком проделать описанную выше процедуру. Получим:

$$\sum_{a\ldots b} v_i\cdot\left(t_i-t_{i-1}\right)=\int_a^b v(t)\,dt=S(b)-S(a).$$

Вспоминая, что $v(t)=S'(t)$, получим очень важную теорему:

$$\int_a^b S'(t)\,dt=S(b)-S(a)$$

или

$$\int S'(t)\,dt=S(t).$$

Итак, *основная теорема матанализа (она же теорема Ньютона-Лейбница): производная и интеграл есть противоположные функции.*

3. Несколько правил дифференцирования и интегрирования.

Дифференцирование.

$$\frac{d}{dx}k=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\frac{df(x)}{dx}\pm\frac{dg(x)}{dx}=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot\frac{df(x)}{dx}=k\cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$$

$$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}=f'(g)\cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x;\ \frac{d}{dx}a^x=a^x\cdot\ln a$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

Интегрирование

$$\int\left[k\cdot f(x)\right]dx=k\cdot\int f(x)dx$$

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

$$\int e^x dx=e^x+C$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$$

Связь между неопределённым и определённым интегралом:

$$\int_a^b f(x)dx=\int f(x)dx\Big|_a^b=\left(\int f(x)dx\right)_{x=b}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=a}$$